TANIMLAYICI İSTATİSTİKLER

MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

Prof. Dr. Mehmet AKSARAYLI

DEU İİBF

EKONOMETRİ BÖLÜMÜ

mehmet.aksarayli@deu.edu.tr

www.mehmetaksarayli.com

Tanımlayıcı İstatistikler

Yer Ölçüleri (Merkezi Eğilim Ölçüleri)

- Duyarlı Ortalamalar
  - Aritmetik ort.
  - Tartılı Aritmetik
  - Geometrik ort.
  - Kareli ort.
  - Harmonik ort.
- Duyarlı Olmayan Ort.
  - Mod
  - Medyan
  - Kartiller

Değişkenlik Ölçüleri

- Değişim Aralığı (Range)
- Standart sapma
- Varyans
- Mutlak sapma
- Değişkenlik katsayısı
- Kartil sapma katsayısı
- Ortalama sapma katsayısı

Çarpıklık Ölçüleri

- Bowley asimetri ölçüsü
- Pearson asimetri ölçüsü

Basıklık Ölçüleri

Merkezi Eğilim (Yer) Ölçüleri

•Veri setini tanımlamak üzere kullanılan ve genellikle tüm elemanları dikkate alarak veri setini özetlemek için kullanılan ölçülerdir.

• Veri setindeki tüm elemanları temsil edebilecek merkez noktasına yakın bir değerdir.

• Merkezi eğilim ölçüleri olarak da adlandırılır.

İstatistiki Verilerin Gösterim Tipleri

1. Basit Veri – Basit Seri

Basit veri , ölçüm sırasına göre bir sütün veya satırda v... dir.

X_i : Değişken
3
9
2
5
4

Veriler eğ... büyüklükl... sıralanırsa ... alır.

X_i : Değişken
2
3
4
5
9

2. Frekans Serisi

Kesikli veriler için, değerler ve frekanslar olacak şekilde iki sütunlu gösterimdir.

X_i Değişken	f_i veya n_i Frekans – Gözlem Sıklığı
0	44 adet
1	24 adet
2	18 adet

Diğer isimlendirmeler;

- **Frekans Tablosu**
- **Frekans Dağılımı**
- **Sınıflanmış Seri**
- **Gruplanmış Seri**
- **Bölümlenmiş Seri**
- **Kesikli Veriler İçin Frekans Serisi**
- Maddelere ilişkin veriler için ise **Dağılma Serisi**

3. Gruplanmış Seri

Sürekli veriler için, değerler ve frekanslar olacak şekilde iki sütunlu gösterimdir.

Sürekli veriler bu gösterimde aralıklı olacak şekilde sınıflara ayrılmıştır.

Sınıflar (Aralıklar)	f_i veya n_i
0 – 2'den az	4 adet
2 - 4'den az	7 adet
4 - 6'dan az	3 adet

Diğer isimlendirmeler;

- **Sınıflanmış Seri**
- **Bölümlenmiş Seri**
- **Sürekli Veriler İçin Frekans Serisi**

1. Aritmetik Ortalama

- Üzerinde inceleme yapılan veri setindeki elemanların toplanıp incelenen eleman sayısına bölünmesiyle elde edilen yer ölçüsüne aritmetik ortalama denir.
- Halk dilinde ortalama ifadesi kullanıldığında ilk akla gelen kavram aritmetik ortalamadır.
- Örnek:
  - Sınav notlarının ortalaması,
  - Yaz aylarında m^2'ye düşen ortalama yağış miktarı

Basit Veri İçin Örnek ve Anakütle Ortalaması

$\bar{x}$, x-bar şeklinde telaffuz edilir ve örneklemin ortalamasıdır.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

μ, "mü" şeklinde telaffuz edilir ve anakütle ortalamasıdır

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

Örnek;

Yaş: 24, 26, 20, 18, 24

Aritmetik Ortalama = $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ =(24+26+20+18+24)/5 =22.4

Frekans Serisi İçin Örnek Ortalaması - Örnek 1

Örnek;

10 kadının ayakkabı numaraları:

35, 38, 36, 36, 37, 36, 38, 35, 39, 37,

35, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 38, 38, 39,

Grup	Frekans	X_if_i
35	2	70
36	3	108
37	2	74
38	2	76
39	1	39
Σ	10	367

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i} = 367/10 = 36.7$$

Frekans Serisi İçin Örnek Ortalaması - Örnek 2

Örnek Bir işletmede aynı parçayı üreten işçilerin bu parçayı üretim sürelerinin dağılımı aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Parça üretim süresinin aritmetik ortalamasını bulunuz.

Parça üretim süresi (dk) (X_i)	İşçi sayısı (f_i)	$f_i.X_i$
12	2	24
13	5	65
14	10	140
15	7	105
16	4	64
Toplam	28	398

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{398}{28}$$

$$\overline{X} = 14,21 \ dk.$$

Gruplanmış Seriler İçin Aritmetik Ortalama

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

f : frekans

k : sınıf sayısı

i = 1,2,3,……….,k

m : sınıf orta noktası

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$

- Sınıflanmış serilerde her bir sınıf içindeki değerlerin neler olduğu bilinmediğinden ve yalnızca her bir sınıfın frekans değerleri bilindiğinden dolayı sınıfı temsil etmek üzere sınıf orta noktaları hesaplamada kullanılır.
- Kullanılan formül gruplanmış seriler için kullanılan formüle benzerdir.

Gruplanmış Seriler İçin Aritmetik Ortalama – Örnek 1

Sınıflar	f_i	m_i	$f_i.m_i$
0 – 10'dan az	12	5	60
10 - 20'dan az	6	15	90
20 - 30'dan az	4	25	100
30 – 40"dan az	2	35	70
40 – 50'dan az	1	45	45
Σ	25		365

$$\overline{X} = \frac{\sum m_i f_i}{\sum f_i} = 365/25 \quad = 14.6$$

Gruplanmış Seriler İçin Aritmetik Ortalama – Örnek 2

Örnek Bir işyerinde yapılan telefon görüşmelerinin süresinin dağılımı için aşağıdaki gruplanmış seri verilmiştir. Buna göre görüşme süresinin aritmetik ortalamasını bulunuz.

Görüşme süresi	Görüşme sayısı (f_i)	m_i	$f_i m_i$
0 - 2	5	1	5
2 - 4	10	3	30
4 - 6	40	5	200
6 - 8	30	7	210
8 - 10	25	9	225
Toplam	110		670

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{670}{110}$$

$$\overline{X} = 6,09 \quad dakika$$

Aritmetik Ortalamanın Özellikleri

1. Aritmetik ortalama hassas bir ortalama olup serideki aşırı değerlerden etkilenir ve aşırı değere doğru kayma gösterir.
2. Serinin gözlem sayısı ile aritmetik ortalaması çarpılırsa serinin toplam değeri elde edilir. $N\overline{X} = \sum X_i$
3. Serideki gözlem değerlerinin aritmetik ortalamadan sapmaları toplamı sıfır olur.
$$\sum (X_i - \overline{X}) = \sum X_i - N\overline{X} = \frac{\sum X_i}{N} - \frac{N\overline{X}}{N} = \overline{X} - \overline{X} = 0$$
4. Serideki değerlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının kareleri toplamı minimum olur. $\sum (X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow Minimum$
5. Aritmetik ortalama özellikle normal dağılıma yakın serilerin ortalaması için elverişlidir.
6. Bir serinin değerleri, diğer iki serinin değerleri toplamından oluşuyorsa bu serinin aritmetik ortalaması da diğer iki serinin aritmetik ortalamaları toplamına eşit olur. $\overline{X} = \overline{Y} + \overline{Z}$

2. Ağırlıklı (Tartılı) Aritmetik Ortalama

- Bir serideki gözlem değerlerinin önem dereceleri farklı olursa, bu tür serilerin aritmetik ortalaması tartılı olarak hesaplanır. Bunun için önem derecesini gösteren katsayılar (tartılar) kullanılır.
- İndex sayıların hesaplanmasında, yüzdelerin ortalamasında çarpımların ortalamasının alınmasında kullanılır
- Örnek olarak öğrencilerin ortalama notlarını hesaplarken derslerin kredileri tartı olarak düşünülürken, ücretlerin belirlenmesinde kıdem tartı olarak kabul edilebilir.

- Basit seriler için $$\bar{X}_T = \frac{\sum t_i X_i}{\sum t_i}$$
- Frekans serileri için $$\bar{X}_T = \frac{\sum t_i f_i X_i}{\sum t_i f_i}$$
- Gruplanmış serileri için $$\bar{X}_T = \frac{\sum t_i f_i m_i}{\sum t_i f_i}$$

Ağırlıklı (Tartılı) Aritmetik Ortalama – Örnek1

Örnek Aşağıda bir öğrencinin almış olduğu dersler, notları ve kredileri verilmiştir. Not ortalamasını tartılı aritmetik ortalama cinsinden hesaplayınız.

Dersler	**Notlar (X_i)**	**Kredi (t_i)**	**t_iX_i**
İstatistik	70	3	210
Matematik	60	4	240
İktisat	50	3	150
İşletme	80	2	160
Toplam	260	$\sum t_i=12$	$\sum t_iX_i=760$

$$\bar{X}_T = \frac{\sum t_i X_i}{\sum t_i} = \frac{760}{12}$$

$$\bar{X}_T = 63{,}33 \ puan$$

Ağırlıklı (Tartılı) Aritmetik Ortalama – Örnek2

Örnek: İstatistiki Bölge Birimleri Sınıflandırmasına göre Türkiye toplam 12 bölgeye ayrılmaktadır. Aşağıda bu bölgelere ilişkin 2000 yılı nüfus ve kişi başına düşen GSYİH (YTL) miktarları verilmektedir. Bu verilerden yola çıkarak Türkiye geneline ilişkin ortalama kişi başına düşen GSYİH miktarını bulunuz.

BÖLGE ADI	GSYİH (1000YTL) X	Toplam nüfus (1.000.000) w	wx
Kuzeydoğu Anadolu	1.1	2.5	2.75
Ortadoğu Anadolu	1.3	3.7	4.81
Güneydoğu Anadolu	1.4	6.6	9.24
İstanbul	3.7	10.0	37
Batı Marmara	2.9	2.9	8.41
Ege	3.1	8.9	27.59
Doğu Marmara	3.9	5.7	22.23
Batı Anadolu	2.8	6.4	17.92
Akdeniz	2.5	8.7	21.75
Orta Anadolu	1.9	4.2	7.98
Batı Karadeniz	2.1	4.8	10.08
Doğu Karadeniz	1.7	3.1	5.27
TOPLAM	**28.4**	**67.5**	**175.03**

Aritmetik ortalama ile hesaplanırsa:

$$\bar{x} = \frac{1.1+1.3+1.4+3.7+2.9+3.1+3.9+2.8+2.5+1.9+2.1+1.7}{12} = \frac{28.4}{12} = 2.367$$

Sakınca nedir?

Ağırlıklı aritmetik ortalama ile hesaplanırsa:

$$\bar{x}_w = \frac{(1.1\times 2.5)+(1.3\times 3.7)+...+(1.7\times 3.1)}{2.5+3.7+...+3.1} = 2.59$$

3. Geometrik Ortalama

Üssel/üstel artış gösteren veriler için aritmetik ortalamanın temsil kabiliyeti zayıflayacaktır. Bunu yerine geometrik ortalama kullanılır.

Virüslerin çoğalması örneği;

Periyot	Virüs sayısı
1. Periyot	2
2. Periyot	4
3. Periyot	8
4. Periyot	16

İncelenen periyotlar itibariyle ortalama virüs sayısı için toplam virüs sayısının periyot sayısına bölünmesi ile bulunan ortalamanın temsil kabiliyeti zayıftır. Çünkü artış doğrusal şekilde değil üssel/üstel olarak katlanarak artmıştır.

Geometrik Ortalama – Hesaplama Prosedürü

•Bir seriyi oluşturan tüm değerlerin birbiriyle çarpılıp, değer sayısı kadar kökünün alınmasıyla bulunan ortalamadır.

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3......x_n}$$

•Dağılımdaki aşırı büyük/küçük değerlere karşı aritmetik ortalama kadar duyarlı değildir. Aşırı değerler içeren dağılımlar için kullanışlıdır.

•Dağılım terimlerinden biri sıfır veya negatif ise geometrik ortalama hesaplanamaz. İlkinde terimlerin birbiri ile çarpımı sıfırdır. Diğerinde ise kökü yoktur ya da bulunsa bile anlamsızdır.

•Geometrik ortalama, genellikle yüzdelerin, oranların, indeks sayılarının ve bir noktayla diğer bir nokta arasındaki süreci kapsayan yıllık oranların bulunmasında kullanılır.

•Terimleri yaklaşık olarak aynı oranda değişen dağılımlar için kullanılır; nüfus, milli gelir, bileşik faize yatırılmış sermaye gibi oldukça değişmez bir oranda artış gösteren dağılımların çeşitli tarihlerdeki değerlerinin ortalaması geometrik ortalamaya göre belirlenir.

• Ortalama oranları, Değişim Oranları, Logaritmik dağılış gösteren veri setleri, için kullanışlıdır.

Örnek: fiyat indeksleri, faiz formülleri.

Virüslerin çoğalması örneği;

Periyot	Virüs sayısı
1. Periyot	2
2. Periyot	4
3. Periyot	8
4. Periyot	16

$$\bar{X} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, $x_4 = 16$ olup bu durumda

$$\text{Geometrik Ortalama} = \sqrt[4]{(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)} = \sqrt[4]{(2)(4)(8)(16)} = \sqrt[4]{(2^1)(2^2)(2^3)(2^4)}$$
$$= \sqrt[4]{(2^{10})} = 2^{10/4} = 2^{2,5} = (2^2)(2^{0,5}) = (2^2)(2^{1/2}) = (2^2)(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})$$
$$\approx 4(1,414) \approx 5,66$$

Her iki ortalama birbirine yakın görünmekle beraber üstel artış yavaş yavaş araya daha büyük bir mesafe koyacaktır.

Geometrik Ortalamada Hesaplama Kolaylığı - Logaritma

- **Basit seri :**

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3......x_n} \qquad G = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = (x_1.x_2.x_3........x_n)^{1/n}$$

$$\log G = \frac{1}{n}[\log x_1 + \log x_2 + ...\log x_n] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right] \qquad G = anti\log\frac{1}{n}\sum_{i=!}^{n}\log x_i$$

Frekans serilerinde;

$$G = \sqrt[\Sigma f]{x_1^{f_1}.x_2^{f_2}........x_n^{f_n}} = \left(x_1^{f_1}x_2^{f_2}...x_n^{f_n}\right)^{1/\Sigma f}$$

$$G = \sqrt[N]{\underbrace{x_1x_1.....x_1}_{f_1 \text{tane}}\ \underbrace{x_2x_2.....x_2}_{f_2 \text{tane}}\ ....\ \underbrace{x_nx_n.....x_n}_{f_n \text{tane}}} = \sqrt[N]{x_1^{f_1}\ x_2^{f_2}\ ....\ x_n^{f_n}} = \sqrt{x_1^{f_1}x_2^{f_2}...x_n^{f_n}}$$

$$\log G = \frac{1}{\Sigma f}[f_1\log x_1 + f_2\log x_2 + ...+ f_n\log x_n] = \frac{1}{\Sigma f}\sum_{i=1}^{n} f_i\log x_i$$

$$G = anti\log\frac{1}{\Sigma f}\sum_{i=1}^{n} f_i\log x_i$$

Geometrik Ortalama - Örnek

- **Örnek** Bir işletmede aynı parçayı üreten 5 işçinin belli bir günde ürettikleri kusurlu parça sayıları aşağıda verilmiştir. Bu işçilerin parça üretiminin geometrik ortalamasını bulunuz.
- Kusurlu parça sayısı (X_i): 3,5,8,15,30 dur.
- GO = $\sqrt[5]{3*5*8*15*30} = \sqrt[5]{54,000}$ = 8,84 parça

Geometrik Ortalama - Örnek

Örnek: ABC şirketinin yıldan-yıla olan fuel deki tüketim harcamalarının değişimi yüzde -5, 10, 20, 40, ve 60. büyüme faktörlerinin geometrik ortalamasını kullanarak harcamalardaki ortalama yıllık yüzde değişim belirlenir. Büyüme faktörleri için yüzde değişim dönüştürme ile elde edilenler;

0.95 1.10 1.20 1.40 1.60

1. Yol Çarpım İle

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \sqrt[5]{(0,95)(1,10)(1,20)(1,40)(1,60)}$$
$$= \sqrt[5]{2.80896} \approx 1,229$$

2. Yol Logaritma İle

$$Log\, G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n} = \frac{-0,022276 + 0,041393 + 0,079181 + 0,146128 + 0,204120}{5}$$

$$Log\, G = \frac{0,448546}{5} \approx 0,08971$$

G = anti log 0, 08971 = $10^{0,08971} \approx 1,229$

Geometrik Ortalama - Örnek

Bir alışveriş merkezindeki 5 farklı meyvenin satış fiyatı aşağıdaki gibidir. Buna göre meyvelerin satış fiyatlarının geometrik ortalamasını hesaplayınız.

Elma: 1,5 YTL. Üzüm: 2,5 YTL Erik: 1 YTL Muz : 3 YTL. Armut : 2 YTL.

1. Yol Çarpım İle

$$G = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n} = \sqrt[5]{1(1.5)(2)(2.5)(3)}$$
$$= \sqrt[5]{22.5} \approx 1.86\,YTL.$$

2. Yol Logaritma İle

$$Log\ G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n} = \frac{0 + 0.17609 + 0.30103 + 0.39794 + 0.47712}{5}$$

$$Log\ G = \frac{1.35218}{5} \approx 0.27045$$

G = anti log 0.27045 = $10^{0.27045} \approx$ 1.86 YTL.

Geometrik Ortalama ve İktisadi Çıkarsama

- Geometrik diziye benzer değişim gösteren nüfus, milli gelir artışı, fiyat artışı ve sermaye artışı gibi seriler genel olarak bir önceki yılın belli bir yüzdesi şeklinde değişim göstermektedir. Bunun için bir dönemlik (ay yıl vs)değişim oranı geometrik ortalama ile belirlenir. Bu eğilimin gelecekte de benzerlik göstereceği varsayımı ile gelecek dönem ile ilgili tahminler elde edilebilir.
- Bir malın fiyatı için:

  Po: başlangıç dönemi değeri,

  Pn: n. Dönemin değeri,

  r : bir dönemlik değişim yüzdesi

$$P_n = P_0(1+r)^n \longrightarrow (1+r)^n = \frac{P_n}{P_0} \longrightarrow (1+r) = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}$$

$$\longrightarrow r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} - 1 \qquad \longrightarrow \log(1+r) = \frac{\log P_n - \log P_o}{n}$$

Geometrik Ortalama ve İktisadi Çıkarsama- Örnek

Örnek *Bir X malının 1995 yılı fiyatı 10000 TL , 2003 yılı fiyatı 300000 TL olduğu bilindiğine göre;*

a) Bu malın yıllık fiyat artış oranını hesaplayınız
b) 2010 yılı için X malının fiyatını tahmin ediniz
c) 1985 yılı fiyatı ne olmuş olabilir
d) 1999 yılı fiyatını tahmin ediniz
e) Hangi yılda fiyatlar 50000000 TL olur?

Çözüm

$P_{1995} = 10000$ $P_{2003} = 300000$ $n = 8$ **(2003-1995)**

Fiyat artış oranı için geometrik artış dikkate alınırsa;

a) $(1+r) = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} = \sqrt[8]{\frac{300000}{10000}} \Rightarrow (1+r) = \sqrt[8]{30} \quad (1+r) = 1{,}53$ fiyat artışı %53

b) $P_n = P_0(1+r)^n$ formülünden 2010 yılı fiyatı tahmin edilebilir.

$P_{2010} = P_{2003}(1{,}53)^{(2010-2003)}$ $P_{2010} = 300000(1{,}53)^7 = 300000(19{,}626)$

$P_{2010} = 5887800$ TL olur.

4. HARMONİK ORTALAMA

Gözlemlerin terslerinin aritmetik ortalamasının tersidir.

$$H = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad \text{veya} \qquad \frac{1}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}$$

Harmonik ortalama aşağı eğimlidir. H.O'da $x_i > 0$ olmalıdır.

Eğer $x_1 = x_2 = \ldots\ldots x_n$ ise $\bar{x} = G = H$ olur.

$$\bar{x} > G > H$$

Harmonik Ortalama’nın Kullanım Alanları

- **Harmonik ortalamanın kullanıldığı yerler**
- Harmonik ortalama az kullanılan ortalamalardan biri olup, özellikle oran şeklinde ortaya çıkan verilerin ortalamasında kullanılır. Bir seride sabit ve değişken unsurun yer değiştiriyorsa, yani sabit unsur, değişken, değişken unsur sabit oluyorsa böyle durumlarda harmonik ortalama kullanılır.
- Hız → yol (km)/zaman(saat):*zaman sabit, alınan yol değişken*
- Verim → zaman/parça: *üretilen parça sabit, zaman değişken*
- Fiyat → ödenen para(TL)/miktar(kg): *miktar sabit, ödenen para değişken olarak ifade edilir.*
- Bu ifadeler tam ters şekilde; yani sabit unsuru değişken, değişken unsuru sabit tutmak sureti ile de ifade edilebilir.
- Hız → zaman/yol şeklinde ters olarak ifade edilebilir. (Belli uzunluktaki bir yolun ne kadar zamanda alındığı ifade edilebilir.)
- Verim → parça/zaman: Belli bir zamanda ne kadar parça üretildiği
- Fiyat → miktar/ödenen para: Para miktarı sabit iken, bu paraya alınabilecek değişen mal miktarı şeklinde düşünülebilir

Bu gibi durumlarda harmonik ortalama en uygun sonucu verir.

Harmonik Ortalama - Örnek

Örnek: Bir tekstil fabrikasında çalışan dört kişinin bir pantolonu ütüleme süreleri aşağıda verilmiştir. Buna göre bu fabrikada bir pantolon ortalama kaç dakikada ütülenir?

İşçi 1: 10 dk. İşçi 2: 6 dk. İşçi 3: 4 dk. İşçi 4 : 5 dk.

$$\frac{1}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}}{4} = \frac{43}{240}$$

$$H = \frac{240}{43} \approx 5.58\, dk.$$

Harmonik Ortalama - Örnek

Örnek: A ve B gibi iki şehir arasında 100km lik bir yol vardır. Bir otomobilli yolun ilk yarısını 30 km/saat hızla gidiyor. Diğer yarısını 40 km/saat hızla gidiyor. Hız ortalaması nedir?

v = ortalama hız ; t = geçen zaman ; d = alınan yol

t1: Yolun ilk yarısında geçen zaman

t2: Yolun ikinci yarısında geçen zaman

$$\frac{d}{2} = v_1.t_1 = v_2.t_2$$

$$t_1 = \frac{d}{2v_1} \quad ve \quad t_2 = \frac{d}{2v_2}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{2}.\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{vt}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

$$v = \frac{d}{t} = \frac{vt}{\frac{vt}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{40}\right)} = 34.28 = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Harmonik ortalama

Harmonik Ortalama - Örnek

- ***Örnek*** *Bir ilkokulda 5. Sınıf öğrencilerinin okuma hızlarını ölçmek için yapılan araştırmada alınan sonuçlar şöyledir. Buna göre öğrencilerin ortalama okuma hızını harmonik ortalama ile bulunuz*

1 dakikada okunan kelime sayısı (X_i)	$\frac{1}{X_i}$
60	0,0166
68	0,0147
72	0,0139
75	0,0133
80	0,0125
Toplam	0,0710

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}} = \frac{5}{0.071}$$

H=70,42 kelime

Harmonik Ortalama - Örnek

Örnek: Sakarya ilinde aylık yağışların dağılımı ile ilgili yapılan çalışmada aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Bu verilerden hareketle aylık yağışların harmonik ortalamasını bulunuz.

Yağış (kg/m^2)	Ay sayısı (f_i)	m_i	$\frac{f_i}{m_i}$
0 - 20	4	10	0,4
20- 40	6	30	0,2
40- 60	10	50	0,2
60- 80	7	70	0,1
	27		0,9

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{m_i}} = \frac{27}{0,9}$$

$$H = 30\,kg/m^2$$

5. KUADRATİK (KARELİ) ORTALAMA

- Gözlemlerin karelerinin aritmetik ortalamasının köküdür.
- Diğer ortalamaların kullanılmadığı durumlarda kareli ortalama kullanılabilir. Bir seride sıfır ve/veya farklı işaretli değerler varsa geometrik ve harmonik ortalamalar hesaplanamaz, hesaplansa da mantıklı sonuçlar vermez. Eğer aritmetik ortalama da makul bir sonuç vermiyorsa kareli ortalama kullanılabilir.
- Kareli ortalama, aritmetik ortalamadan sapmaların bir ölçüsü olan standart sapmanın hesaplanmasında kullanıldığından ve negatif değerleri de dikkate aldığından, çok büyük bir öneme sahiptir.

.

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

$$K > \bar{x} > G > H$$

Kareli Ortalama - Örnek

- Basit seri için örnek: beş günlük satışları 2,3,7,9,10 birim olan bir satış noktasının günlük satış miktarını kareli ortalama cinsinden hesaplayınız.

X	X^2
2	4
3	9
7	49
9	81
10	100
Toplam	243
KO = √∑X² / N = √243/5	
= √48.6 = 6.97	

Kareli Ortalama - Örnek

Bir otomobil servis istasyonuna günlük olarak gelen araçların dağılımı aşağıda verilmiştir.

Araç sayısı (X_i)	Gün sayısı (f_i)	X_i^2	$f_i \cdot X_i^2$
1	4	1	4
2	8	4	32
3	12	9	108
4	10	16	160
5	6	25	150
Toplam	$\sum f_i = 40$		$\sum f_i \cdot X_i^2 = 454$

$$K = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot X_i^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{454}{40}}$$

$$K \cong 3{,}39\, araç$$

$$K = \sqrt{11{,}35}$$

6. Mod

- Bir veri setinde en çok gözlenen (en çok tekrar eden) değere veya frekansı en fazla olan şans değişkeni değerine **mod** adı verilir.

- Veri setinin *modu* olmayacağı gibi birden fazla da *modu* olabilir.

- Mod genellikle kesikli şans değişkenli için oluşturulan gruplanmış serilerde aritmetik ortalama yerine kullanılabilir.

A. Basit Seriler İçin Mod

Örnek: Bir fabrikada çalışan 7 endüstri mühendisinin bildiği yabancı dil sayıları aşağıda verilmiştir. Buna göre bu mühendislerin bildiği yabancı dil sayısının modunu hesaplayınız.

x_i **:** 2,0,1,2,0,1,0 0,0,0,1,1,2,2.

Veri setinde en çok tekrar eden eleman 0 olduğundan (3 kez) mod değeri 0 'dır.

- Eğer veri seti 1,0,1,2,0,1,0 şeklinde olsaydı veri seti iki modlu olacaktı. (0 ve 1)

- Eğer veri seti 2,0,1,2,0,1 şeklinde olsaydı veri setinin modunun olmadığı ifade edilecekti.

B. Frekans Serileri İçin Mod

Örnek: Aşağıdaki tabloda bir TV bayisindeki LCD televizyonların ekran boyutlarına göre satış miktarları verilmiştir. Frekans dağılımının aritmetik ortalamasını hesaplayınız.

Ekran	Satış Adedi
51	1
66	3
72	4
82	5
94	7

- **Frekans dağılımına bakıldığında en fazla satış miktarı 94 ekran LCD televizyonda olduğundan dolayı (7 adet) dağılımın modunun 94 olduğu söylenir.**
- *Eğer 82 ekran LCD televizyonlarından da 7 adet satılsaydı dağılımın iki modu olduğu ifade edilirdi. (82 ve 94)*

C. Gruplanmış Seriler İçin Mod

- Sınıflanmış serilerde mod değeri hesaplanırken ilk olarak mod sınıfı belirlenir.
- Mod sınıfı frekansı en yüksek olan sınıftır.
- Mod sınıfı belirlendikten sonra bu sınıf içerisinde yer alan modun tam değeri sınıf frekansı ve kendine komşu olan sınıf frekansları dikkate alınarak hesaplanır.

Gruplanmış Seriler İçin Mod - Örnek

Sınıflar	f_i	m_i
0 – 10'dan az	12	5
10 - 20'dan az	6	15
20 - 30'dan az	4	25
30 – 40''dan az	2	35
40 – 50'dan az	1	45
Σ	25	

Mod Sınıfı

$$\text{Mod} = L_{mod} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.i$$

Sınıf aralığı

Mod sınıfının alt sınırı

Mod sınıfıyla bir önceki sınıf fr. arasındaki fark

Mod sınıfıyla bir sonraki sınıf fr. arasındaki fark

Gruplanmış Seriler İçin Mod - Örnek

Sınıflar	f_i	m_i
0 – 10'dan az	12	5
10 - 20'dan az	6	15
20 - 30'dan az	4	25
30 – 40''dan az	2	35
40 – 50'dan az	1	45
Σ	25	

Mod Sınıfı

$$\text{Mod} = L_{mod} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.i = 0 + \frac{(12-0)}{(12-0)+(12-6)}.10 = 6.67$$

7. Medyan

- Bir veri setini büyükten küçüğe veya küçükten büyüğe sıraladığımızda tam orta noktadan veri setini iki eşit parçaya ayıran değere **medyan** adı verilir.

- Veri setinde aşırı uçlu elemanlar olduğunda aritmetik ortalamaya göre daha güvenilirdir.

- Medyan, veri setindeki tüm elemanlardan etkilenmez.

A. Basit Seriler İçin Medyan

- **Veri Setinin Hacmi Tek Sayı İse;**

$$\frac{n+1}{2}$$ ***nci gözlem değeri medyandır.***

- **Veri Setinin Hacmi Çift Sayı İse;**

$$\frac{n}{2} \quad \textit{ve} \quad \frac{n}{2}+1$$ ***nci gözlem değerinin aritmetik ortalaması medyandır.***

A. Basit Seriler İçin Medyan - Örnek

Örnek: İstatistik I dersini alan 10 öğrencinin vize notları aşağıdaki gibi sıralanmıştır. Buna göre vize notları için medyan değerini hesaplayınız.

30,42,56,61,68,79,82,88,90,98

n/2 ve (n/2)+1 nci elemanlar 68 ve 79 olup bunların ortalaması 73,5 medyan değeridir.

Veri Seti 30,42,56,61,68,79,82,88,90 şeklinde 9 adet veriden oluşsaydı (n+1)/2 nci eleman olan 68 veri setinin medyanı olacaktı.

B. Frekans Serileri İçin Medyan

- Frekans serilerinde medyan değeri hesaplanırken veri setinin tam orta noktasının hangi gruba ait olduğunu belirlemek için kümülatif frekans sütunu oluşturulur.

- Sıra numarası belirlendikten sonra o sıra numarasına ait grup medyan değeri olarak ifade edilir.

B. Frekans Serileri İçin Medyan - Örnek

Grup	Frekans	$\sum f_i$
51	1	**1**
66	3	**4**
72	4	**8**
82	5	**13**
94	7	**20**

Örnek: Yandaki tabloda bir TV bayisindeki LCD televizyonların ekran boyutlarına göre satış miktarları verilmiştir. Frekans dağılımının medyanını hesaplayınız.

- n/2 ve (n/2)+1 nci gözlem değerlerine karşılık gelen değerler (10 ve 11 nci sıra) 82 olduğundan dolayı medyan değeri 82'dir.

Grup	Frekans	$\sum f_i$
51	1	**1**
66	3	**4**
72	4	**8**
82	5	**13**
94	2	**15**

- Frekans dağılımı yandaki gibi olsaydı (n+1)/2 nci elemana (8 nci elemana) karşılık gelen sayı 72 olduğunda dolayı veri setinin medyanı 72 olacak idi.

C. Gruplanmış Seriler İçin Medyan

- Sınıflı serilerde medyan değeri hesaplanırken ilk olarak medyan sınıfı belirlenir.
- Medyan sınıfı kümülatif frekanslar dikkate alındığında toplam frekansın yarısını içinde bulunduran sınıftır.
- Medyan sınıfı belirlendikten sonra medyan sınıfından bir önceki sınıfın kümülatif frekansı ve medyan sınıfı frekansı dikkate alınarak hesaplanır.

C. Gruplanmış Seriler İçin Medyan - Örnek

Sınıflar	f_i	m_i	Σf_i
0 – 10'dan az	12	5	12
10 - 20'dan az	6	15	18
20 - 30'dan az	4	25	22
30 – 40"dan az	2	35	24
40 – 50'dan az	1	45	25
Σ	25		

Medyan Sınıfı

$$\text{Med} = L_{med} + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - \Sigma f_1}{f_{med}} . i$$

Medyan sınıfından bir önceki sınıfın Yığmalı frekansı

Medyan sınıfının alt sınırı

Medyan sınıfının frekansı

Sınıf aralığı

C. Gruplanmış Seriler İçin Medyan - Örnek

Sınıflar	f_i	m_i	Σf_i
0 – 10'dan az	12	5	12
10 - 20'dan az	6	15	18
20 - 30'dan az	4	25	22
30 – 40"dan az	2	35	24
40 – 50'dan az	1	45	25
Σ	25		

Medyan Sınıfı

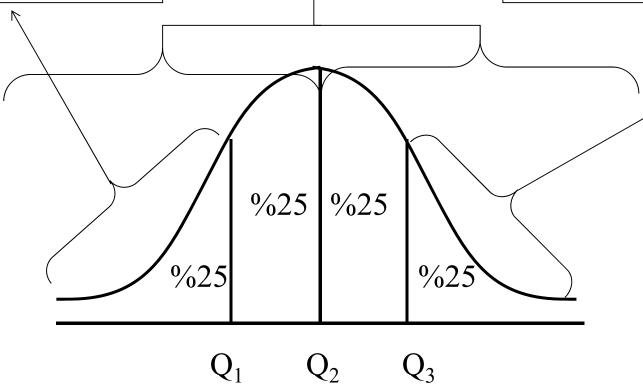
$$\text{Med} = L_{med} + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - \Sigma f_{med}}{f_{med}} . i = 10 + \frac{\frac{25}{2} - 12}{6} . 10 = 10.83$$

8. KARTİLLER

$$Q_1 = L_{Q_1} + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - f_l}{f_{Q_1}}.i$$

$$Q_2 = Med = L_{Q_2} + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - f_l}{f_{Q_2}}.i$$

$$Q_3 = L_{Q_3} + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - f_l}{f_{Q_{31}}}.i$$



KARTİLLER – Örnek (1. Kartil)

Sınıflar	f_i	Σf_i
0-20'den az	8	8
20-40'dan az	12	20
40-60'dan az	25	45
60-80'den az	15	60
80-100	10	70

→ Q_1 sınıfı

$$Q_1 = L_{Q_1} + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - f_l}{f_{Q_1}}.i = 20 + \frac{\frac{70}{4} - 8}{12}.20 = 35.83$$

KARTİLLER – Örnek (2. Kartil)

Sınıflar	f_i	Σf_i
0-20'den az	8	8
20-40'dan az	12	20
40-60'dan az	25	45
60-80'den az	15	60
80-100	10	70

→ Q_2 sınıfı

$$Q_2 = Med = L_{Q_2} + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - f_l}{f_{Q_2}}.i = 40 + \frac{\frac{70}{2} - 20}{25}.20 = 52$$

KARTİLLER – Örnek (3. Kartil)

Sınıflar	f_i	Σf_i
0-20'den az	8	8
20-40'dan az	12	20
40-60'dan az	25	45
60-80'den az	15	60
80-100	10	70

→ Q_3 sınıfı

$$Q_3 = L_{Q_3} + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - f_l}{f_{Q_{31}}}.i = 60 + \frac{\frac{3 \times 70}{4} - 45}{15}.20 = 70$$