OLASILIK KURAMI

Prof. Dr. Mehmet AKSARAYLI
DEU İİBF
EKONOMETRİ BÖLÜMÜ
mehmet.aksarayli@deu.edu.tr

OLASILIK (PROBABILITY) KAVRAMI

Populasyon hakkında bilgi sahibi olmak amacı ile alınan **örnek**lerden elde edilen bilgiler bire bir doğru olmayıp hepsi mutlaka bir **hata** payı taşımaktadır.

Bu hata payının ortaya çıkmasının sebebi **seçilen örneklerin şansa bağlı** olarak farklılıklar göstermesi ve bunun sonucunda her deneyde farklı sonuçlarla karşılaşılmasıdır.

Olasılık;

"Herhangi bir deneyin sonucunda gözlenebilecek farklı durumlar ile hangi sıklıkla karşılaşılacağı",

bir başka ifadeyle;

"Ortaya çıkan olayların belirsizliğinin incelenmesi"

anlamına gelir.

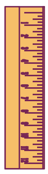
OLASILIK (PROBABILITY) KAVRAMI (Devam...)

Bir diğer ifadeyle OLASILIK (Probability); Bir olayın gerçekleşme şansının sayısal değeridir.

N adet denemede s adet başarı söz konusu ise, da başarının nisbi frekansı $\lim_{n\to\infty}(s/n)$

limiti belli bir değere ulaşıyorsa, bu değer o denemenin başarı olasılığını verir. Olasılık daima 0 ile 1 arasındadır. Tüm **olay** olasılıklarının toplamı 1'dir.

1 Kesin



0 İmkansız

17 yy.'da şans oyunlarıyla birlikte kullanılmaya başlanan olasılık, uygulamalı matematiğin bir dalı olarak gelişim göstermiş ve istatistiksel yorumlamada önemli uygulama alanı bulmuştur.

Temel Tanımlar ve Kavramlar-I

- ***Tekrarlanabilir Deney*:** Sonucu kesin olarak kestirilemeyen bir tek çıktı (şans değişkeni) oluşturan bir eylem, gözlem ya da süreçtir.

  Örnek: Madeni para atılması, içinde 5 sarı 7 lacivert bilye bulunan torbadan bir top çekilmesi.

- ***Basit Olay*:** Bir deneyin çıktısı daha basit bir çıktı olarak ayrıştırılamıyorsa basit olaydır.

  Örnek: Hilesiz bir zarın atılması sonucu 2 gelmesi, bir deste iskambil kağıdından çekilen kağıdın maça as olması.

Temel Tanımlar ve Kavramlar-II

- ***Olay**:* Birden fazla basit olayın bir araya gelmesi sonucu oluşur.

Örnek: Hilesiz bir zarın atılması sonucu asal sayı gelmesi, içinde 5 sarı 7 lacivert bilye bulunan torbadan 2 top çekildiğinde birinin sarı birinin lacivert olması.

- ***Örnek Uzayı:*** Bir deneyin sonucunda elde edilen tüm mümkün basit olaylarının oluşturduğu kümedir. Genellikle S ile tanımlanır.

Örnek: Hilesiz bir zarın atılması sonucu elde edilen örnek uzayı;

x: zarın üst yüzünde gelen sayı

S = { x; x = 1,2,3,4,5,6 }

Temel Tanımlar ve Kavramlar-III

- ***Ayrık Olay**:* Eğer A ve B gibi iki olay aynı anda geçekleşemiyor ise bu olaylara ayrık(birbirini engelleyen) olaylar denir

Örnek: Madeni para atılması sonucunda yazı veya tura gelmesi ayrık olaylardır.

Zarın atılması sonucu 1 ve tek sayı gelmesi olayları ayrık olaylar değildirler. Çünkü aynı anda gerçekleşebilirler.

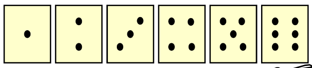
- ***Eşit Olasılıklı Olaylar:*** Bir örnek uzayındaki tüm basit olayların ortaya çıkma olasılığı eşit ise bu olaylara eşit olasılıklı olaylar denir.

Örnek: Bir deste iskambil kağıdından bir adet kağıt çekilmesi.

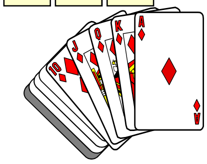
Örnek Uzayı

Tüm alternatif durumların içinde bulunduğu küme.

- Bir zarın tüm yüzeyleri:



- Oyun kartı destesinin tüm seçenekleri:



•1 madeni paranın atımında üst yüz : S={Y,T}

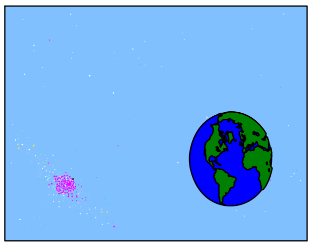
•Madeni bir çift paranın atımında üst yüzlerdeki yazı sayısı : S={0.1.2}

•Bir çift zar atışında üst yüzlerin toplamı: S={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

OLAY: Bir deneyin ya da daha çok sonucun kümesidir.

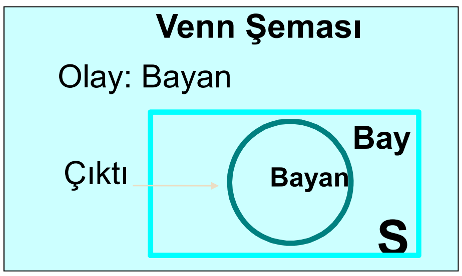
Örnek Uzayının Görselleştirilmesi

- 1. Listeleme
  - S = {Yazı, Tura}
- 2. Venn Şeması
- 3. Kontenjans tablosu
- 4. Ağaç Diagramı



Listeleme:

S = {Bay,Bayan}



Kontenjans Tablosu

Kesişen olay: Kadın, 20 yaşın altında

S = {Bayan,<20; Bayan,>20;Bay,<20; Bay,>20}

Basit olay

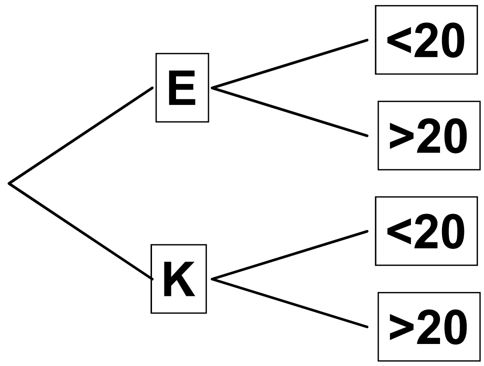
	<20	>20	Toplam
Kadın	47	16	63
Erkek	45	22	67
Toplam	92	38	130

Örnek uzayı

Ağaç Diyagramı Gösterimi

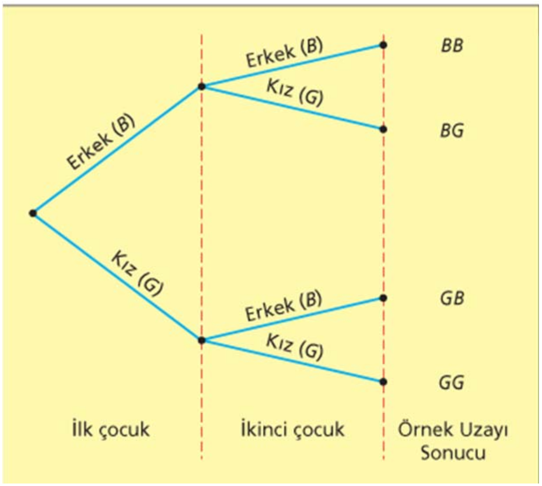
S = {Bayan,<20; Bayan,>20;Bay,<20; Bay,>20}

Olay alternatifleri:



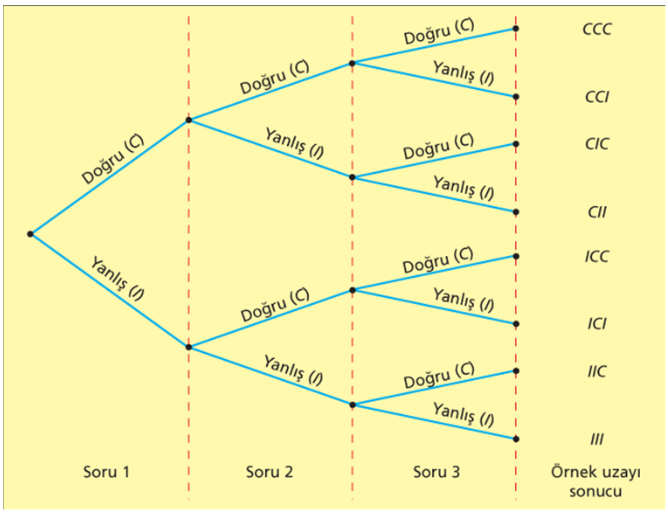
Ağaç Diyagramı Örneği

İki Çocuğun cinsiyet durumuna göre ağaç diyagramı



Ağaç Diyagramı Örneği

Doğru – Yanlış Şeklindeki Üç Sorunun Cevaplarına Göre Ağaç Diyagramı



Olasılığın Tanımları

- Klasik (A Priori) Olasılık
- Frekans (A Posteriori) Olasılığı
- Aksiyom Olasılığı

NOT: Bu sıralama olasılık teorisinin tarihsel gelişimini tanımlamaktadır.

Klasik Olasılık

- Eğer bir <u>örnek uzayı</u> n(S) adet <u>ayrık</u> ve <u>eşit olasılıkla</u> ortaya çıkan basit olaylardan oluşuyor ve örnek uzayındaki basit olaylardan n(A) adedi A olayının özelliğine sahip ise A'nın olasılığı:

  P(A) = n(A) / n(S) kesri ile elde edilir

- Klasik olasılık TÜMDENGELİME dayanan çıkarımlar yaparak olasılığı bulur.

Klasik Olasılık Örneği

Örnek: Bir kapta 5 sarı, 5 lacivert ve 5 adet yeşil bilye bulunmaktadır. Çekilen bir bilyenin sarı olma olasılığı nedir?

A: Çekilen bir bilyenin sarı olması

n(S): Örnek uzayı eleman sayısı = 15

n(A): Örnek uzayındaki A elemanı sayısı = 5

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Klasik Olasılık Niçin Yetersizdir?

- Örnek uzayının eleman sayısı sonsuz olduğu durumlarda,
- Eşit olasılıklı olay varsayımı yapılamadığı durumlarda ,
  - *Tümdengelim çıkarımları yapılamadığında* klasik olasılık ile hesaplama yapılamayacağından dolayı yetersizdir.

Ne Yapılabilir?

- *Araştırılan anakitle üzerinde tekrarlı deneyler gerçekleştirilerek sonuçlar analiz edilmek üzere kayıt edilmelidir.*

Frekans Olasılığı (Göreli Sıklık Kavramı - Relative Freq.)

□ Araştırılan anakitle üzerinde n adet deney uygulanır. Yapılan bu deneylerde ilgilenilen A olayı n(A) defa gözlenmiş ise A olayının göreli frekansı (yaklaşık olasılığı):

$$P(A) = n(A) / n$$

olarak bulunur.

- P(Olay) = X/T
  - X = İstenen olayın oluşma sayısı
  - T = Mümkün tüm olayların sayısı

İncelenen 100 birimden 2'si arızalı

Arızalı olma olasılığı = 2/100

Frekans Olasılığının Kararlılık Özelliği

□ Gerçekleştirilen deney sayısı arttıkça P(A) olasılık değerindeki değişkenlik azalacak ve giderek bir sabit değere yaklaşacaktır. Bu duruma ***kararlılık özelliği*** adı verilir.

□ Bir olayın olasılığı deneyin tekrarlama sayısı sonsuza yaklaşırken o olayın göreli frekansının alacağı limit değer olarak tanımlanır:

$$p = P(A) = \lim_{n\to\infty} n(A) / n$$

Frekans Olasılığı Niçin Yetersizdir?

- Olasılığın kararlılık değerine ulaştığı deneme sayısı kaçtır?

- Sonsuz adet deneme yapmak mümkün değildir.

- Aynı deney iki defa aynı tekrar sayısı ile gerçekleştirildiğinde elde edilen olasılıklardan hangisi olayın olasılığı olarak kabul görecektir?

Aksiyom Olasılığı Nedir?

- Olasılığın matematiksel teorisini tanımlar.
- Bu teorinin oluşturduğu **ideal modeller** yaşadığımız dünyanın problemlerini çözmede kullanılır.

- Olasılığın iki genel tipinin sahip olduğu önemli ortak nokta: Her ikisinin de, benzer koşullarda (teorik olarak aynı koşullarda) uygulanan deneylere gereksinim duymasıdır.

- Bununla birlikte benzer koşullarda tekrarlı olarak uygulanamayan durumlarda olasılıkların hesaplanmasında AKSİYOM OLASILIĞI yardımcı olur.
  - Örneğin; İlk aldığınızda İstatistik dersinden başarılı olma durumu ve olasılığı?

Aksiyomlar

- **Aksiyom 1:**
  - P(A) örnek uzayı S'deki her A olayı için $P(A) \geq 0$ olan bir gerçel sayıdır.
- **Aksiyom 2:**
  - $P(S)=1 \qquad \{ P(\varnothing)=0 \}$
- **Aksiyom 3:**
  - Eğer $S_1, S_2, \ldots$ Olaylarının her biri S'deki ayrık olaylar ise, diğer bir deyişle $S_i \cap S_j = \varnothing$ tüm $i \neq j$ için ise,

  $P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots$

Sadece Aksiyomlar Yeterli mi?

HAYIR

- Bu aksiyomların ve onlara bağlı teoremlerin faydalı bir model geliştirilmesinde bize yardımcı olabilmesi için, S örnek uzayındaki her bir A olayı için olasılığın hesaplanmasında kullanılacak bir <u>FONKSİYONA</u> ya da bir <u>KURALA</u> gereksinim vardır

Örnek Uzayın Tipleri

- Bu fonksiyonlar İlgilenilen anakütlenin Tanımladığı ÖRNEK UZAYINA Göre Farklılık Gösterir.

Sık karşılaşılan üç farklı örnek uzayı;

- **Sonlu elemanlı kesikli örnek uzayı (sayılabilir sonlu)**
- **Genel kesikli örnek uzayı (sayılabilir sonsuz)**
- **Sürekli örnek uzayı (sayılamaz sonsuz)**

olarak ifade edilir.

Örnek Uzayı Örnekleri

Örnek;

x : herhangi bir gün içinde yağmur yağması

x = 0 (yağmur yağmaz)

x = 1 (yağmur yağar)

Örnek Uzayı;

S = { x / 0, 1 }

veya

S = { x / Yağmursuz , Yağmurlu }

olarak belirlenir ve **sayılabilir sonlu** bir örnek uzayıdır.

Örnek Uzayı Örnekleri

Örnek;
x : bir zar için 6 gelinceye kadar yapılan atış sayısı
Örnek Uzayı;
S = { x / 1,2,3,……….. }
olarak belirlenir ve **sayılabilir sonsuz** bir örnek uzayıdır.
(kesikli şans değişkeni)

Örnek;
x : öğrencilerin boyları
Örnek Uzayı;
S = { x / 150 < x < 200 }
olarak belirlenir ve **sayılamaz sonsuz** bir örnek uzayıdır.
(sürekli şans değişkeni)

Örnek Uzayı ve Olay Sayısını Belirleyen Sayma Yöntemleri

- Klasik olasılığın diğer bir ifade ile eşit olasılıklı olayların geçerli olduğu durumlarda:
  - Örnek uzayının eleman sayısı,
  - İlgilenilen olayın eleman sayısının

  belirlenmesi gereklidir.

  Kullanılan iki temel prensip;

  1) Toplama Yöntemi

  2) Çarpma Yöntemi

Toplama Yöntemi

□ Bir A olayı *m* farklı şekilde, başka bir B olayı da *n* farklı şekilde oluşabilen **ayrık olaylar** ise;

A veya B olayı $n + m$ farklı şekilde oluşabilir.

Örnek: İstanbul'dan İzmir'e 2 farklı tren seferi, 4 farklı havayolu firması, 40 farklı otobüs firması ve 1 adet denizyolu firması ile gidilebildiğine göre İstanbul'dan İzmir'e kaç farklı şekilde gidilir?

$2 + 4 + 40 + 1 = 47$

Çarpma Yöntemi

□ Bir A olayı *m* farklı şekilde, başka bir B olayı da *n* farklı şekilde oluşabilen ve **aynı anda oluşmaları mümkün olaylar** ise;

A ve B olayı $n * m$ farklı şekilde oluşabilir.

Örnek: Bir iskambil destesinden çekilen iki kartın birinin Kupa diğerinin Maça olması kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

$13 * 13 = 169$

NOT: Çarpma yöntemi bağımsız olaylar için kullanılır.

Tekrarlı Deney Durumunda Çarpma Yöntemi

k farklı sonuç veren bir deney r kez tekrar edilirse ortaya çıkan tüm durumların sayısı;

k^r olarak hesaplanır.

Örnek: Bir zarı 3 kez attığımızda ortaya çıkabilecek tüm mümkün durumların sayısı sayısı;

$6^3 = 216$ adettir.

- ***Örnek uzayının eleman sayısı 216'dır.***

Örnek Uzayı ve Olay Sayısının Büyük Olduğu Durumlar

Örnek uzayı ve olay sayısının büyük olduğu durumlarda kullanılan sayma yöntemleri;

- **Permütasyon**
- **Kombinasyon**

Permütasyon

- Sıraya konulacak n adet nesne olsun ve her biri sadece bir kez kullanılmak üzere kaç farklı sıralama yapılabilir?

$$\boxed{n}\ \boxed{n-1}\ \boxed{n-2}\ \cdots\cdots\ \boxed{2}\ \boxed{1}$$

n nesnenin mümkün sıralamalarının sayısı:

$n(n\text{-}1)(n\text{-}2)...(2)(1)=n!$ $\quad {}_nP_n = n!$

Permütasyon (Devamı…)

- n tane nesne arasından seçilmiş x tane nesnenin permütasyon sayısı ${}_nP_x$ olarak ifade edilir.
- Toplam n tane nesne arasından x tane nesne seçilir ve bunlar sıraya konulursa ortaya çıkabilecek sıralamaların sayısıdır ve şu şekilde hesaplanır:

$$ {}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!} $$

Kullanıldığı durumlar

- İadesiz örnekleme
- Örneğe çıkış sırası önemli

Permütasyon Örnekleri

Örnek: 8 atletin katıldığı 100 metre yarışmasında ilk üç dereceye girenler kaç farklı şekilde belirlenir ?

$$_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8*7*6 = 336$$

Örnek: 2,3,5,6,7 ve 9 sayılarını kullanarak 4 basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç sayı oluşturulur?

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6*5*4*3 = 360$$

6	5	4	3

=360

Kombinasyon

- n adet nesne arasından seçilen x tanesinin kombinasyon sayısı $_nC_x$ ile gösterilir. Sıralama önemli olmaksızın tüm durumların sayısı olarak ifade edilir. Bu sayı şu şekilde hesaplanır:

$$_nC_x = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

- Kullanıldığı durumlar;
  - İadesiz örnekleme
  - Örneğe çıkış sırası önemsiz

Kombinasyon Örnekleri

Örnek: Beş kişilik bir topluluktan üç kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilir ?

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5*4*3*2}{2*3*2} = 10 $$

Örnek: 10 bay ve 5 bayan arasından 2 bay ve 1 bayan üye içeren bir kurul kaç farklı şekilde oluşturulur?

$$ {}_{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10*9}{2} = 45 $$ (10 bay arasından 2 bay)

$$ {}_5C_1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5 $$ (5 bayan arasından 1 bayan)

Çarpım kuralı uygulanarak 45 * 5 =225 farklı şekilde oluşturulur.

Örnek: 10 işletme ve 8 iktisat öğrencisi arasından 5 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır. Rasgele bir seçim yapıldığında komisyonda çoğunlukla işletme öğrencisi olma olasılığı nedir?

5 işletme 0 iktisat, 4 işletme 1 iktisat, 3 işletme 2 iktisat

$$ \frac{{}_{10}C_5 \; {}_8C_0}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_4 \; {}_8C_1}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_3 \; {}_8C_2}{{}_{18}C_5} = \frac{5292}{8568} \approx 0{,}62 $$

Örnek: Ali ve Can isimli iki arkadaş zar atarak oyun oynuyorlar. Oyuna Ali başlıyor. Zar 1 veya 2 gelirse oyunu kazanıyor. 3,4 veya 5 gelirse oyuna devam etme hakkını kazanıyor. 6 gelirse zar atma sırası Cana geçiyor. Ali'nin bu oyunu kazanma olasılığı bulunuz.

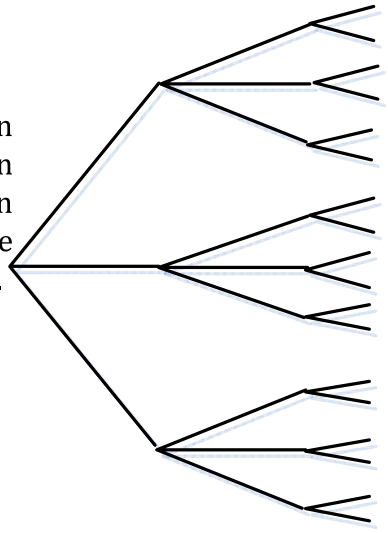
Ali'nin oyunu kazanma olasılığı p olsun,

- **Ali 1 veya 2 atar oyunu kazanır, olasılık : 2 / 6**
- **3,4 ve 5 atar oyuna tekrar devam eder ve sonra oyunu kazanır olasılık: (3/6)p**
- **İlk atışta 6 atar oyun Can'a geçer ve Can oyunu kaybeder olasılık (1/6)(1-p)**

p = 2/6 + (3/6)p + (1/6)(1-p) $\rightarrow$ p = 3/4

Ağaç Diyagramı

- Her birinin sonucunun sonlu sayıda olduğu birden fazla deneyin tüm mümkün sonuçlarını görsel bir şekilde ortaya koymak için kullanılır.



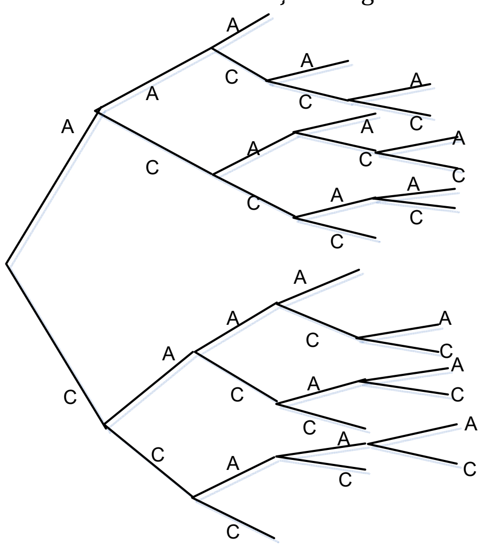
Ağaç Diyagramı Örneği

Örnek: Ali ile Can masa tenisi oynamaktadırlar. 3 set kazananın galip geleceği maçın ortaya çıkabilecek tüm mümkün sonuçlarını gösteren ağaç diyagramını oluşturunuz.

Olası Durumlar;

AAA,CCC
AACA,CCAC
ACAA,CACC
ACCC,CAAA
ACACA,CACAC
AACCA,CCAAC
AACCC,CCAAA
ACACC,CACAA
ACCAA,CAACC
ACCAC,CAACA

20 ADET



Olasılık Tanımları - Özet

- Klasik Olasılık Değerlendirmesi (Classical Probability)

$$P(E_i) = \frac{\text{Number of ways } E_i \text{ can occur}}{\text{Total number of experimental outcomes}}$$

- Frekans (A Posteriori - Relative Freq.) Olasılığı

$$\text{Relative Freq. of } E_i = \frac{\text{Number of times } E_i \text{ occurs}}{N}$$

- Sübjektif Olasılık (Subjective Probability)

Bir olayın olasılığı hakkında karar verici tarafından bir görüş veya bir hükme dayalı…

Olasılığın Kuralları

Muhtemel Değerler ve Toplam için Kurallar

Individual Values

$0 \le P(E_i) \le 1$

Her bir olay E_i için

Kural 1

Sum of All Values

$$\sum_{i=1}^{k} P(e_i) = 1$$

Kural 2

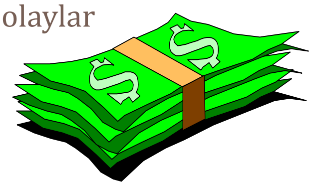
k = Örnek Uzayı sayısı

e_i = i. sonuç

Olasılık Kavramları: Olay Tipleri

Basit Olay (Elementer Olay) :

Tek bir karakteristikle belirlenen olaylar



A: Bayan

B: 20 yaşın altında

C: Bir deste karttan kırmızı kart çekilmesi

D: Bir deste karttan bir as çekilmesi

Kesişen Olay:

Aynı anda gerçekleşen olaylar

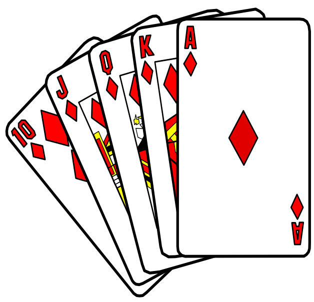
A ve B, (A∩B): Bayan, 20 yaşın altında
C ve D, (C∩D): Kart destesinden kırmızı bir as çekilmesi

Olasılık Kavramları: Olay Tipleri

Bileşik olay (Katışık Olay) (Birbirini Engelleyen Olay):

Olaylardan biri yada diğeri gerçekleşir, birden çok sonuçtan oluşur.

C yada D, (C∪D): Bir deste karttan kırmızı veya as çekme



Olasılık Kavramları: Olay Tipleri

- **Bağımlı ve Bağımsız Olaylar**
  - **Bağımsız Olaylar (Independent Events)** : Eğer bir olayın ortaya çıkması (occurrence) öteki olayın ortaya çıkma olasılığını etkilemiyorsa, olaylar **bağımsız** olaylardır.

E_1 = Madeni bir para atma deneyinde tura gelmesi
E_2 = Aynı paranın 2. atışında yazı gelmesi

İkinci atığın sonucu önceki atışın sonucuna bağlı değildir.

  - **Bağımlı Olaylar (Dependent Events):** Bir olayın ortaya çıkması diğerinin ortaya çıkması olasılığını etkiliyorsa bağımlı olaylardır.

E_1 = Meteorolojiden yağmur tahmini yapılması
E_2 = Evden çıkarken şemsiye alınması

İkinci olayın sonucu 1.olayın sonucuna bağlıdır.

Basit Olaylar için Toplama Kuralı

- Bir E_i olayını olasılığı E_i olayını oluşturan çıktıların olasılıklarının toplamına eşittir.
- Şöyle ki;

$$E_i = \{e_1, e_2, e_3\}$$

dolayısıyla:

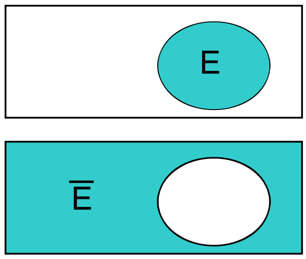
$$P(E_i) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3)$$

Kural 3

Tamamlayıcı (Bütünleyici - Complement) Olay

İki olay kesinlikle aynı anda olamaz.
Para atımında aynı anda hem yazı hem de tura gelemez.

- Bir E olayının tamamlayıcısı E olayını içermeyen mümkün tüm basit olaylar kümesidir. Tamamlayıcı olay E ile gösterilir.
- **Tamamlayıcı Kural**



$$P(\overline{E}) = 1 - P(\overline{E})$$

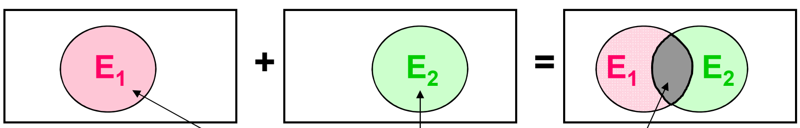
veya, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

İki Olay İçin Toplama Kuralı

- **Toplama Kuralı:**

$$P(E_1 \text{ veya } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ and } E_2)$$

Kural 4



$$P(E_1 \text{ veya } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ and } E_2)$$

Kesişimi iki kere sayma!

Toplama Kuralı Örneği

P(Kırmızı or As) = P(Red) +P(As) - P(Red and As)

$= 26/52 + 4/52 - \boxed{2/52} = 28/52$

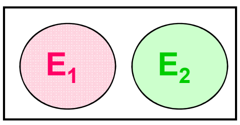
Kesişimi iki kere sayma!

Tip	Renk: Kırmızı	Renk: Siyah	Toplam
As	2	2	4
As Değil	24	24	48
Toplam	26	26	52

Ayrık Olaylar İçin Toplama Kuralı

- Eğer E_1 ve E_2 ayrık olaylarsa,

$P(E_1 \text{ ve } E_2) = 0$



$P(E_1 \text{ veya } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ ve } E_2)$

= 0 ayrık olaylarsa

Bu yüzden,

$\boxed{P(E_1 \text{ veya } E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$ Kural 5

Koşullu Olasılık

Bir olayın gerçekleştiği bilindiği durumlarda diğer bir olayın gerçekleşme olasılığıdır.

$$\underbrace{P(A \mid \mathbf{B})}_{} = \frac{P(A \text{ ve } B)}{P(\mathbf{B})}$$

Kural 6

B olayının gerçekleştiği bilindiğine göre A olayının gerçekleşme olasılığı

$P(A \mid \mathbf{B}) = P(A)$ ise, A ve B birbirinden bağımsız olaylardır.

Kontenjans Tablosu yardımıyla koşullu olasılık hesabı:

Bir desteden çekilen bir kartın siyah olduğu bilindiğine göre as olma olasılığı nedir?

Tip	Renk: Kırmızı	Renk: Siyah	Top.
As	2	2	4
As değil	24	24	48
Toplam	26	26	52

$$P(\text{As} \mid \text{Siyah}) = \frac{P(\text{As VE Siyah})}{P(\text{Siyah})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26}$$

Koşullu Olasılık Örneği

- İkinci el araba pazarındaki arabaların 70% klima (KL) ve 40% CD çalar (CD) ve 20%'sinin ise her ikisine de sahip olduğu tespit edilmiştir.

- Kliması olan bir arabanın CD çalarının olması olasılığı nedir?

  P(CD | AC) = ?

Conditional Probability Example

- İkinci el araba pazarındaki arabaların 70% klima (KL) ve 40% CD çalar (CD) ve 20%'sinin ise her ikisine de sahip olduğu…

	CD	CD Yok	Toplam
KL	.2	.5	.7
KL Yok	.2	.1	.3
Toplam	.4	.6	1.0

$$P(CD \mid AC) = \frac{P(CD\ \text{ve}\ AC)}{P(AC)} = \frac{.2}{.7} = .2857$$

Koşullu Olasılık Örneği

Örnek: Bir üniversitede okuyan öğrencilerin % 70'i tiyatroya, % 35 ise sinemaya ilgi duymaktadır.

a) Bir öğrencinin sinemaya ilgi duyduğu bilindiğinde tiyatroya ilgi duyma olasılığı 0,40 ise her iki aktiviteye birden ilgi duyma olasılığı nedir?

b) Bir öğrencinin tiyatro veya sinemaya ilgi duyma olasılığı nedir?

T:Tiyatroya ilgi duyma   S:Sinemaya ilgi duyma

P (T) = 0,70   P(S) = 0,35

a) P (T / S) = 0,40   P (T ∩ S) =?

$$P(T/S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)}$$

$$P(T \cap S) = P(T/S) * P(S) = 0{,}40 * 0{,}35 = 0{,}14$$

b) $$P(T \cup S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S)$$
$$= 0{,}70 + 0{,}35 - 0{,}14 = 0{,}91$$

Bağımsız olaylar İçin Koşullu Olasılık

- Bağımsız olaylar E_1 , E_2 için koşullu olasılık:

$$\boxed{P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)} \qquad P(E_2) > 0 \text{ şartı ile}$$

$$\boxed{P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)} \qquad P(E_1) > 0 \text{ şartı ile}$$

Kural 7

Koşullu Olasılık Örneği

Örnek: Ali ve Can isimli iki avcının bir hedefi vurma olasılıkları sırasıyla 0,65 ve 0,40 olarak verilmiştir. İki avcı hedefe birlikte ateş ettiğinde hedefin vurulma olasılığı nedir?

A = Ali'nin hedefi vurması   P (A) = 0,65

C = Can'ın hedefi vurması   P (C) = 0,40

P (A U C) = ?

P(A U C) = P (A)+ P (C) – P (A ∩ C)

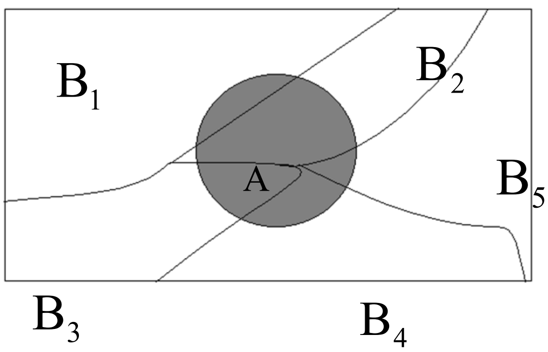
Ali ile Can'nın hedefi vurmaları birbirinden bağımsız olduğundan;

P (A ∩ C) = P (A) . P (C) = 0,65 * 0,40 = 0,26

P(A U C) = 0,65 + 0,40 – 0,26 = 0,79

Şartlı Olasılıkların Bilindiği Durumlarda Tek Bir Olayın Olasılığının Bulunması

Aşağıdaki şekilde A olayının birbiriyle ayrık olan 5 farklı olayın birleşiminden meydana geldiği görülür.



A olayı her bir B olayı ile kesişimleri cinsinden ifade edildiğinde;(birbirini engelleyen olayların birleşiminin olasılığı toplama kuralına göre)

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_5)$$

$$P(A \cap B_i) = P(A / B_i).P(B_i)$$

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3) + P(A/B_4)P(B_4) + P(A/B_5)P(B_5)$$

Koşullu Olasılık Örneği

Örnek: Bir ilaç üç fabrika tarafından üretilmektedir. 1. Fabrikanın üretimi 2. ve 3. fabrikaların üretiminin 2 katıdır. Ayrıca 1. ve 2. fabrikalar % 2, 3. fabrika % 4 oranında bozuk ilaç üretmektedir. Üretilen tüm ilaçlar aynı depoda saklandığına göre bu depodan rast gele seçilen bir ilacın bozuk olma olasılığı nedir.

A = Seçilen ilacın bozuk olma olasılığı P (A) = ?

B_i= Seçilen ilacın i nci fabrikada üretilmesi

$P(B_1) = P(B_2) + P(B_3)$

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$ olduğundan;

$P(B_1) = 0,50$ $P(B_2) = P(B_3) = 0,25$ olarak elde edilir.

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)$$

P(A)=(0.02)(0.5)+(0.02)(0.25)+(0.04)(0.25)=0,025

Depodan seçilen 1000 ürünün 25 tanesinin hatalıdır.

Çarpma Kuralı

- İki olay E_1 ve E_2 için çarpma kuralı:

$$\boxed{P(E_1 \text{ VE } E_2) = P(E_1)P(E_2 \mid E_1)}$$

Kural

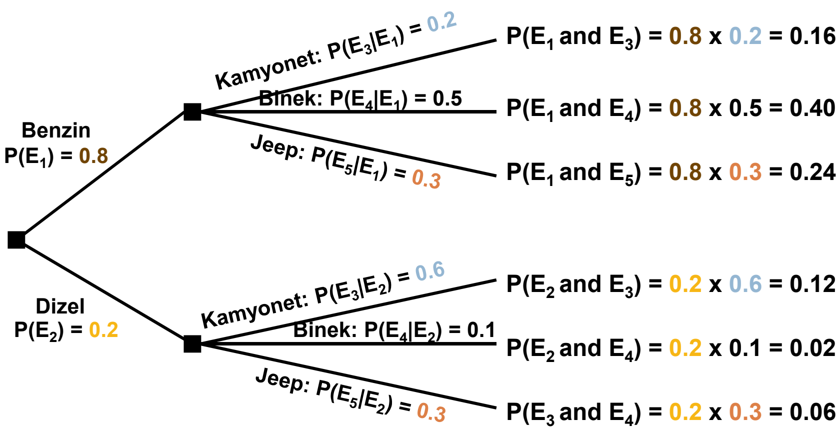
Not: Eğer E_1 ve E_2 bağımlı olaylar ise, yani $P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)$

Çarpma kuralı basit çarpma olarak oluşur:

$$P(E_1 \text{ VE } E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

Kural

Ağaç Diyagram Örneği



Bayes Teoremi

1. Eski olasılıkların yeni bilgiler ışığında güncellenmesi için kullanılır.
2. Koşullu olasılığın bir çeşididir.
3. Tamamen ayrık olaylar için uygulanır.

İlk Olasılık

↓

Yeni Bilgi

↓

Bayes Teoremi

↓

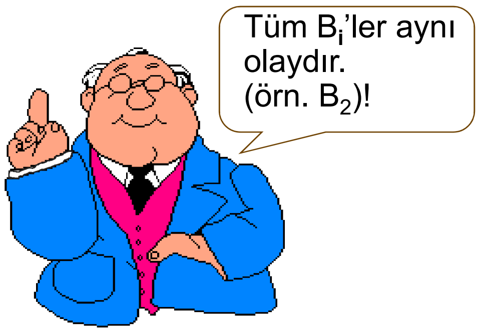
Yenilenmiş Olasılık

Bayes Teoreminin Formülü

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\cdot P(B_i)}{P(A \mid B_1)\cdot P(B_1) + \cdots + P(A \mid B_k)\cdot P(B_k)}$$

$$= \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Aynı olay



Bayes Teoremi

- Sonucun bilindiği durumda sebebin hangi olasılıkla hangi olaydan meydana geldiği ile ilgilenir.

- Ele alınan örnekte depodan rast gele seçilen bir ilacın bozuk çıkması halinde 1.fabrikadan gelmesinin olasılığı araştırıldığında Bayes Teoremine ihtiyaç duyulmaktadır.

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A / B_i) P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A / B_i) P(B_i)}$$

Bayes Teoremi Örneği

Depodan rasgele seçilen bir ilacın bozuk olduğu bilindiğine göre 1 nci fabrikadan gelmiş olma olasılığı;

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{(0.02)(0.5)}{(0.02)(0.5) + (0.02)(0.25) + (0.04)(0.25)} = 0{,}40$$