

**SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER
ve
OLASILIK DAĞILIMLARI**

Dr. Mehmet AKSARAYLI
Dokuz Eylül Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Ekonometri Bölümü
Yöneylem Araştırması Anabilim Dalı

www.mehmetaksarayli.com

Probability Distributions

Probability Distributions

- Discrete Probability Distributions**
 - Binomial
 - Poisson
- Continuous Probability Distributions**
 - Süreklî Uniform
 - Gamma
 - Üstel
 - Normal

www.mehmetaksarayli.com 2

Süreklî Şans Değişkenleri

- Süreklî bir aralıktaki tüm değerleri alabilen değişkenlerdir.
- Bir yolun uzunluğu $25m < x < 50m$ olabilir.

x , D_x tanım aralığına sahip süreklî bir şans değişkeni olsun. $f(x)$ 'in x 'e ait bir **olasılık yoğunluk fonksiyonu** (oyf) olabilmesi için;

Her x için $\int_{D_x} f(x).dx = 1$ olmalıdır.
 $\mu = E(x) = \int_{D_x} x.f(x).dx$
 $V(x) = E[(X_i - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

www.mehmetaksarayli.com 3

ÜSTEL (EXPONENTIAL) DAĞILIM

★ ★ ★ ★ t (zaman)

Zaman ekseninde belirli bir zaman aralığındaki olay sayısı Poisson, iki olay arasında geçen süre ise **ÜSTEL dağılımı** gösterir.

Bir (ilk) olayın ($r = 1$) meydana gelmesine kadar geçen zamanın olasılığı ile ilgili dağılım üslü dağılıştır.

$f(x) = \begin{cases} \alpha.e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ α : birim zamandaki olay sayısı

$E(X) = \frac{1}{\alpha}$ $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$ $P(X \leq x) = \int_0^x \alpha.e^{-\alpha x} dx = 1 - e^{-\alpha x}$
 $P(X > x) = e^{-\alpha x}$

www.mehmetaksarayli.com 4

Exponential Distribution

- Shape of the exponential distribution

www.mehmetaksarayli.com 5

ÖRNEK

A marka televizyonun ömrü yıl olarak X şans değişkeni ile gösterilsin. X 'in oyf:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}.e^{-\frac{1}{6}x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \text{ yıl}$
 $V(X) = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{(\frac{1}{6})^2} = 36$

Televizyonun ömrünün en az 6 yıl olması olasılığı nedir?

$P(X > 6) = \int_6^{\infty} \frac{1}{6}.e^{-\frac{1}{6}x} dx = e^{-\frac{1}{6}.6} = e^{-1} = 0.367$

www.mehmetaksarayli.com 6

Example

Example: Customers arrive at the claims counter at the rate of 15 per hour (Poisson distributed). **What is the probability that the arrival time between consecutive customers is less than five minutes?**

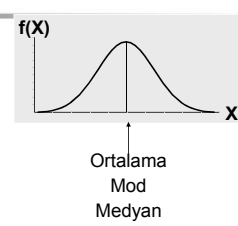
- Time between arrivals is exponentially distributed with mean time between arrivals of 4 minutes (15 per 60 minutes, on average)
- $1/\lambda = 4.0$, so $\lambda = .25$
- $P(x < 5) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-(.25)(5)} = .7135$

www.mehmetaksarayli.com 7

Normal Dağılım

Özellikleri:

- 1. 'Çan-Şekilli' ve simetrik
- 2. Ortalaması, modu ve medyanı eşit
- 3. 'Orta yayılımı' = 1.33σ
- 4. Şans değişkeni sonsuz aralığa sahip



Normal Dağılımın Önemi

- ❖ 1. Çoğu rassal süreçleri ve sürekli olayları tanımlar.
- ❖ 2. İstatistiksel yorumlamanın temelidir.

www.mehmetaksarayli.com 8

- Sürekli ve kesikli şans değişkenlerinin dağılımları birlikte ele alındığında istatistikte en önemli dağılım **Normal dağılımdır.**
- Normal dağılım ilk olarak **1733'te Moivre** tarafından p başarı olasılığı değişmemek koşulu ile binom dağılımının limit şekli olarak elde edilmiştir. **1774'te Laplace** hipergeometrik dağılımını limit şekli olarak elde ettikten sonra **19. yüzyılın ilk yıllarında Gauss** 'un katkılarıyla da normal dağılım istatistikte yerini almıştır.

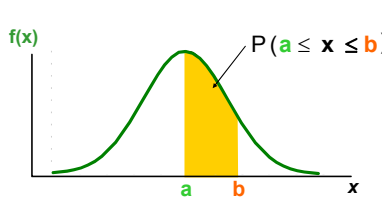
www.mehmetaksarayli.com 9

- ❖ Normal dağılımın ilk uygulamaları doğada gerçekleşen olaylara karşı başarılı bir biçimde uyum göstermiştir. Dağılımın göstermiş olduğu bu uygunluk adının Normal Dağılım olması sonucunu doğurmuştur.
- ❖ İstatistiksel yorumlamanın temelini oluşturan Normal Dağılım, bir çok rassal süreçlerin dağılımı olarak karşımıza çıkmaktadır.
- ❖ Normal dağılım kullanımının en önemli nedenlerinden biride bazı varsayımların gerçekleşmesi halinde kesikli ve sürekli bir çok şans değişkeninin dağılımının normal dağılıma yaklaşım göstermesidir.

www.mehmetaksarayli.com 10

Olasılıkları Elde Etmek;

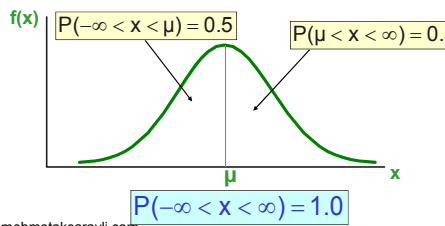
Olasılık eğrinin altındaki alan ile belirlenir.



www.mehmetaksarayli.com 11

Probability as Area Under the Curve

The total area under the curve is 1.0, and the curve is symmetric, so half is above the mean, half is below



www.mehmetaksarayli.com 12

Empirical Rules

What can we say about the distribution of values around the mean? There are some general rules:

$\mu \pm 1\sigma$ verilerin yaklaşık 68.26% içerir

$\mu - 1\sigma$ μ $\mu + 1\sigma$

68.26%

www.mehmetaksarayli.com 13

The Empirical Rule

- $\mu \pm 2\sigma$ verilerin yaklaşık 95.44% içerir
- $\mu \pm 3\sigma$ verilerin yaklaşık 99.72% içerir

95.44%

99.72%

www.mehmetaksarayli.com 14

Normal Dağılım Olasılık Yoğunluk fonksiyonu

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

$f(X)$ = X şans değişkeninin frekansı
 π = 3.14159; $e = 2.71828$
 σ = popülasyonun standart sapması
 X = Şans değişkeninin değeri ($-\infty < X < \infty$)
 μ = popülasyon ortalaması

www.mehmetaksarayli.com 15

Parametrelerin Değişikliğinin Etkileri (μ & σ)

$\mu_A = \mu_B < \mu_C$
 $\sigma_B < \sigma_A = \sigma_C$

www.mehmetaksarayli.com 16

Normal Olasılık Dağılımı

Olasılık, eğrinin altında kalan alana eşittir!

$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$?

www.mehmetaksarayli.com 17

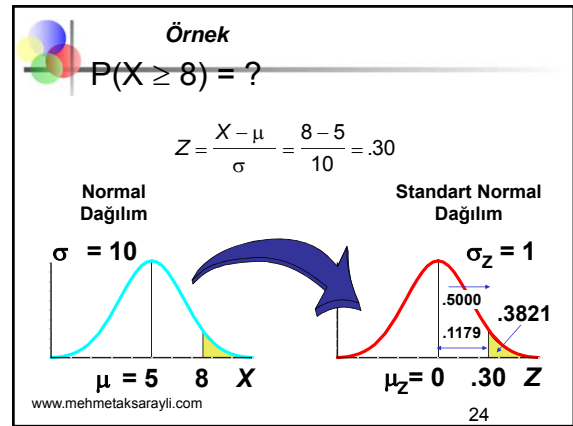
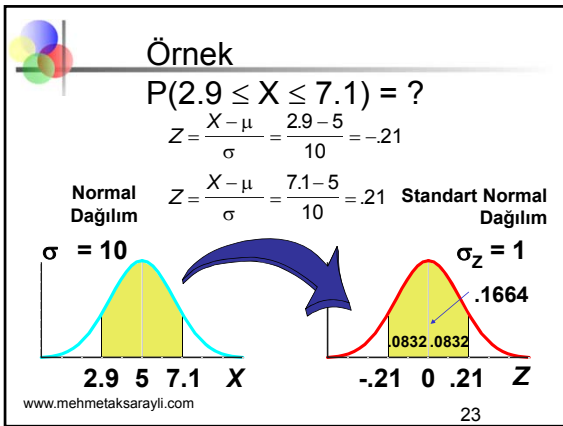
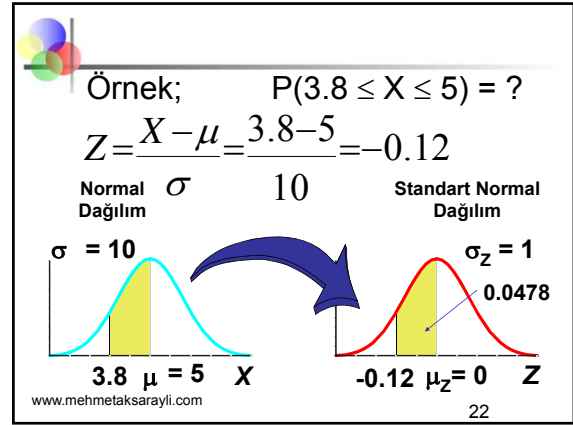
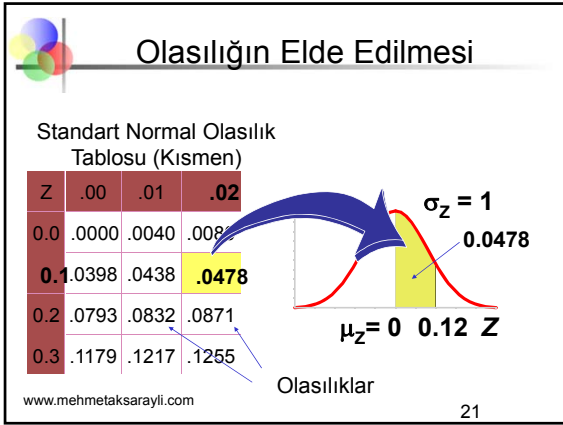
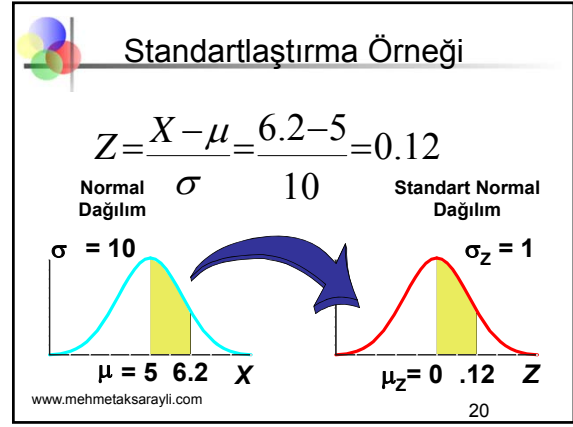
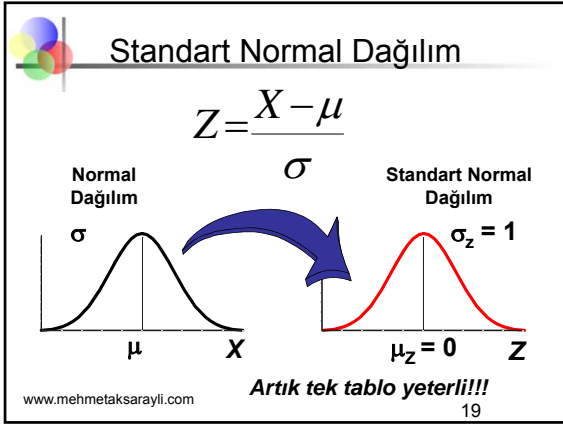
Normal Dağılım Tablolarının Sonsuz Sayısı

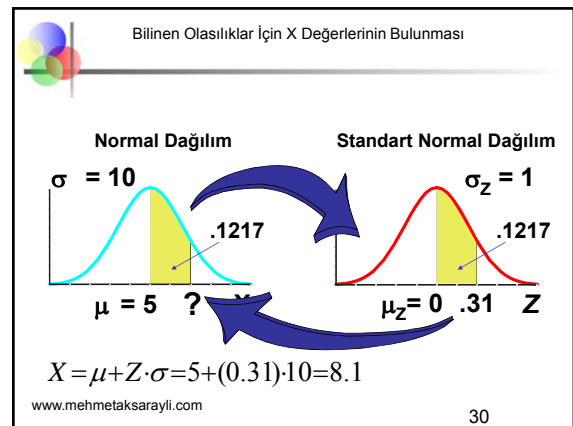
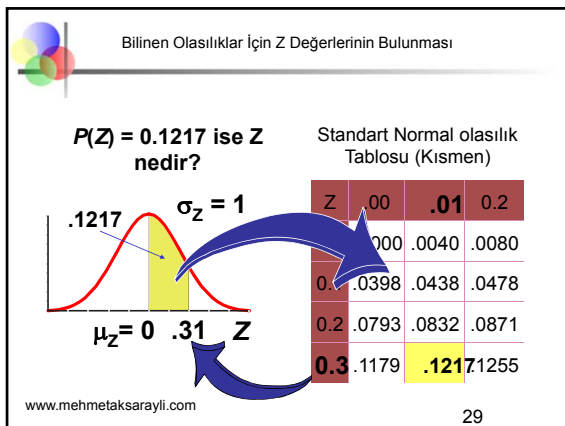
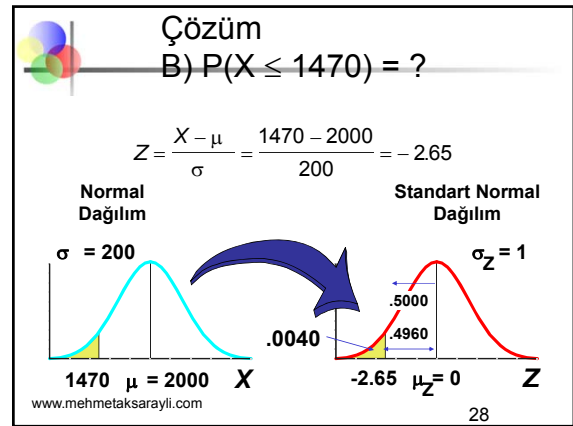
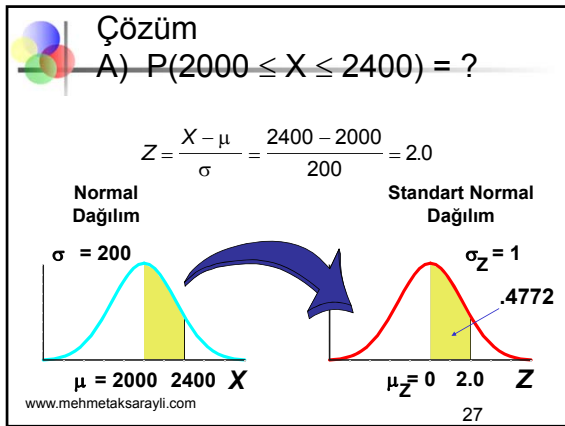
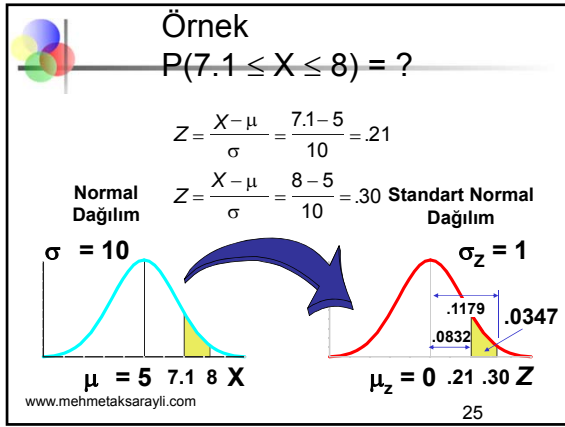
Normal dağılımlar, ortalama ve standart sapma açısından farklılık gösterirler.

Her dağılım için bir tablo gerekir.

Bu da sonsuz sayıda tablo anlamına gelir!

www.mehmetaksarayli.com 18

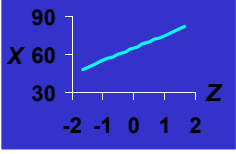




Normallik Varsayımı

- 1. Verilerin karakteristiklerini Normal dağılımın özellikleriyle karşılaştırın
- 2. Normal Olasılık Plot'unu değerlendirin
 - Bilgisayarla çizin yada
 - Verileri standartlaştırılmış kantil değerlerine karşı işaretleyin.

Normal Dağılım İçin NormalOlasılık Plot'u

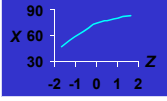


Düz bir çizgi Olmalı!!!

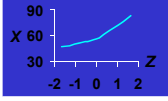
www.mehmetaksarayli.com 31

Normal Olasılık Plot'ları

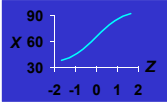
Sola çarpık



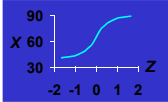
Sağa çarpık



DikdörtgenseL



U-Şekilli



www.mehmetaksarayli.com 32